# Wiskunde 3, 2001/2002

Eindtoets, 18 juni 2002

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je eigen naam en die van je werkcollegedocent. **Bladen waarop deze gegevens ontbreken worden niet nagekeken!** Zet ook op het eerste blad je studentnummer.

De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}.$$

1. Definieer de functie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ door $f(x,y,z) = xy + x$. Laat het oppervlak $S$ gegeven zijn door $z^2 = 1 + x^2 + y^2$, met $z \geq 0$.
   (a) (1) Schets $S$.
   (b) (2) Bepaal met de methode van Lagrangemultiplicatoren de extremen van $f$ beperkt tot $S$. N.B.: Doe dit niet zonder Lagrangemultiplicatoren!
   (c) (3) Bepaal de aard van deze extremen met een tweede-orde test.
   (d) (3) Vind een parametrisering van $S$ van de vorm $\Psi : (s,t) \mapsto (s,t,h(s,t))$, en definieer $F(s,t) = f(s,t,h(s,t))$. Bepaal de extremen van $F$ en hun aard, en laat zien dat het resultaat in overeenstemming is met wat je voor $f$ had gevonden.

2. Gegeven is de integraal

$$I = \int_1^2 \int_{\log y}^{ay} y \, dx \, dy,$$

   met $a = \frac{1}{2}\log 2$.
   (a) (1) Schets het integratiegebied.
   (b) (2) Bereken $I$ (zonder de integratievolgorde te verwisselen).
   (c) (3) Bereken $I$ door verwisseling van de integratievolgorde.

3. Laat $c$ de doorsnijding zijn van de oppervlakken $S_1 : y - z + 1 = 0$ en $S_2 : z = x^2 + y^2$.
   (a) (3) Vind een parametrisering van $c$, en van het door $c$ begrensde deel van $S_1$.
   (b) (3) Definieer $F(x,y,z) = (y - z, x + z, y - x)$. Toon aan dat $F$ conservatief is en bepaal $\int_c F \cdot \mathrm{d}s$.
   (c) (4) Laat $V$ het gebied zijn begrensd door $S_1$ en $S_2$. Bereken $\int\int\int_V \nabla \cdot G \, \mathrm{d}V$, met $G = (z, z, 2xz + 2yz)$.

4. Gegeven is het oppervlak $S$ geparametriseerd door

$$\Psi(\theta,\phi) = ((a + b\cos\phi)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi),$$

   met $a > b > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$.
   (a) (2) Schets $S$.
   (b) (3) Bereken de oppervlakte van $S$.
   (c) (3) Bereken het volume van het gebied ingesloten door $S$ en het $xy$-vlak.
   (d) (3) Definieer $F(x,y,z) = (y, -x, e^x \sin y + z^3 y \cos y)$. Bereken $\int\int_S \nabla \times F \cdot \mathrm{d}S$.